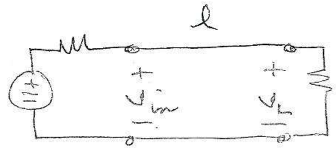
Líneas de Transmisión < telefonos / cable TV

Baja frecuencia – distribución energía eléctrica

altas frecuencias – comunicaciones

- Onda TEM – dos o mas conductores en paralelo
- Teoría de línea de transmisión: combina circuitos con EM.



Circuitos

$V_{in} = V_L$

Línea de transmisión $V_{in} \neq V_L$.

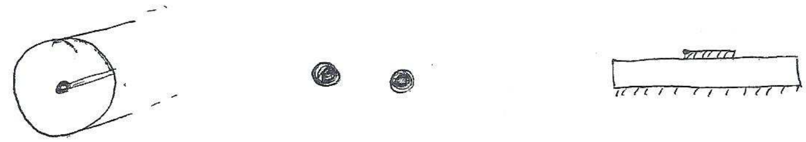
Ej: $V_{in} = V_o \angle 0^\circ$; $V_L = V_o \angle \phi$

- Esto aplica siempre y cuando dimensiones físicas del circuito (línea) sean comparables al λ.

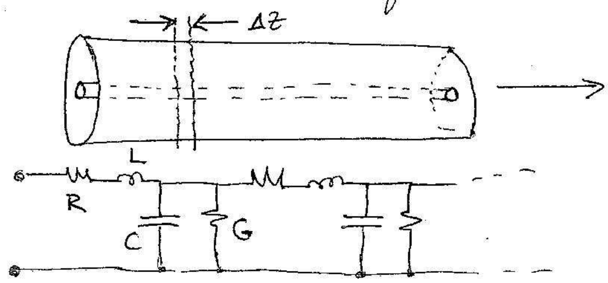
- Parametros de la línea de transmisión

R, L, C, G (distribuidos)

- Geometría de línea define parametros distribuidos.

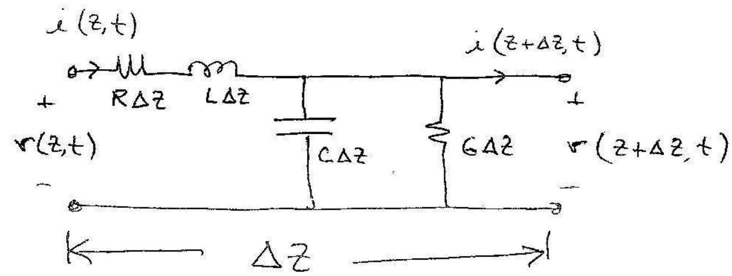


- Nos interesa saber como se comporta V e I a través de la línea de transmisión
- Podemos usar circuito equivalente



línea a lo largo del eje de z.

- Analizar ΔZ de línea de transmisión



KVL:
$$v(z,t) = R\Delta z\, i(z,t) + L\Delta z \frac{di}{dt}(z,t) + v(z+\Delta z,t) = 0$$

$$-\left(\frac{v(z+\Delta z,t) - v(z,t)}{\Delta z}\right) = R\, i(z,t) + L\frac{di}{dt}(z,t)$$

$\Delta z \longrightarrow 0$

$$\boxed{-\frac{dv(z,t)}{dz} = R\, i(z,t) + L\frac{di}{dt}(z,t)}$$

KCL: $i(z,t) = v(z+\Delta z, t)\, G\Delta z + C \frac{dv}{dt}(z+\Delta z, t) + i(z+\Delta z, t)$

$$-\left(\frac{i(z+\Delta z,t) - i(z,t)}{\Delta z}\right) = G v(z+\Delta z, t) + C\frac{dv}{dt}(z+\Delta z, t)$$

$$\boxed{-\frac{d i(z,t)}{dz} = G v(z,t) + C\frac{d v(z,t)}{dt}}$$

Asumiendo fasores; $\frac{d}{dt} \Rightarrow j\omega$

$$-\frac{dV_s}{dz} = R I_s + j\omega L I_s \quad \text{———————} \quad (*)$$

$$-\frac{dI_s}{dz} = G V_s + j\omega C V_s$$

De aquí,

$$\frac{d^2 V_s}{dz^2} = R\frac{dI_s}{dz} + j\omega L \frac{dI_s}{dz} = (R + j\omega L)\frac{dI_s}{dz}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2 V_s}{dz^2} = (R+j\omega L)(G+j\omega C) V_s \Longrightarrow \text{Eq. diferencial}$$

Eq. en terminos de voltajes, de la misma forma puedo expresar en términos de corriente.

$$\Longrightarrow \frac{d^2 V_s}{dz^2} - \gamma^2 V_s = 0 \qquad (\text{Eq. de onda})$$

donde $\gamma^2 = \alpha + j\beta = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$

Recordar que : $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ $\quad \beta = \frac{\omega}{u}$

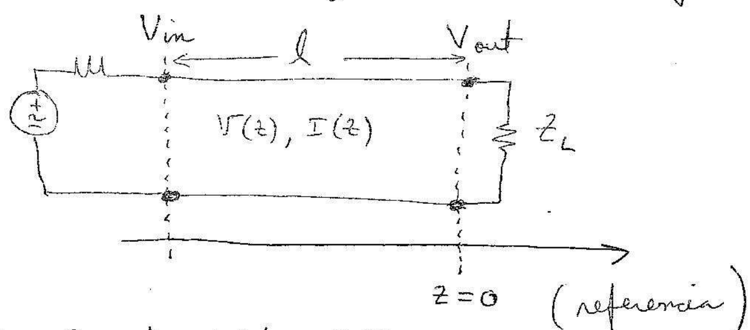
Solución a ecuación : $\quad \theta = \beta l \Longrightarrow$ largo eléctrico

$$V_s(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}$$

$$I_s(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^+ e^{+\gamma z}$$

$$V(z,t) = \underbrace{V_0^+ e^{-\alpha z}}_{\alpha \text{ afecta amplitud}} \cos \underbrace{(\omega t - \beta z)}_{\beta \text{ afecta fase}} + V_0^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

- voltaje depende de posición en línea de T.
- corriente " " " " " "
- asumimos línea a lo largo del eje de "z"
- origen $(z=0)$ localizamos en la carga (Z_L)



$$V_{out} = V_s(z=0) = V_0^+ + V_0^-$$

$$V_{in} = V_s(z=-l) = V_0^+ e^{+\gamma l} + V_0^- e^{-\gamma l}$$

Impedancia característica eq. (*)

$$-\frac{d}{dz}\left(V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}\right) = (R+j\omega L)\left(I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z}\right)$$

$$\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} - \gamma V_0^- e^{+\gamma z} = (R+j\omega L)\left(I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z}\right)$$

$$\gamma V_0^+ = (R+j\omega L) I_0^+ \Longrightarrow \frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{R+j\omega L}{\gamma}$$

$$-\gamma V_0^- = (R+j\omega L) I_0^- \Longrightarrow \frac{-V_0^-}{I_0^-} = \frac{R+j\omega L}{\gamma}$$

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{-V_0^-}{I_0^-} = \frac{R+j\omega L}{\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} = R_0 + jX_0$$

impedancia característica

Admitancia Característica $= Y_0$

Asumiendo línea sin pérdidas: $(R=0,\ G=0)$

$$\alpha = 0 \qquad \gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{(Siempre es real!!)}$$

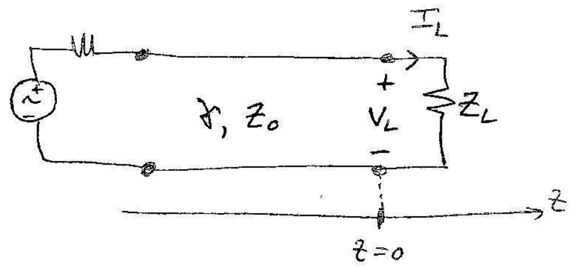
$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z}$$

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{-V_0^-}{I_0^-} = Z_0$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{+j\beta z}$$

$$= \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{+j\beta z}$$

Reflecciones en linea de transmision: ($\gamma = j\beta$)



$$V(z=0) = V_L = V_0^+ + V_0^-$$

$$I(z=0) = I_L = \frac{V_0^+}{Z_0} - \frac{V_0^-}{Z_0}$$

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{\frac{V_0^+}{Z_0} - \frac{V_0^-}{Z_0}}$$

$$\frac{Z_L}{Z_0} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-} \Longrightarrow Z_L (V_0^+ - V_0^-) = Z_0 (V_0^+ + V_0^-)$$

$$\frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \Gamma_L \longleftarrow \text{coeficiente de reflección en la carga.}$$

En general,

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z}$$

$$\Gamma(z) = \frac{V_0^- e^{+j\beta z}}{V_0^+ e^{-j\beta z}} = \underline{\underline{\Gamma_L \, e^{+j2\beta z}}}$$

$$V(z) = V_0^+ \left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)$$

en términos de Γ_L

Notar que: $\Gamma_L = \left.\dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right|_{Z_L = Z_0} = 0$

$\therefore$ No hay reflexiones

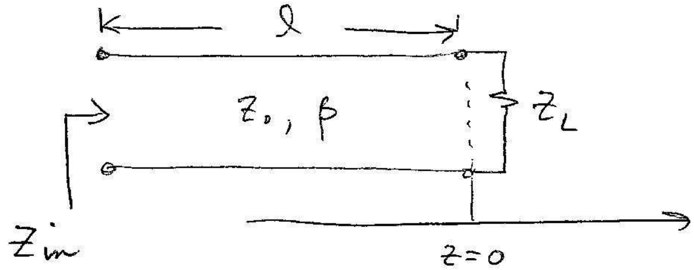
$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + 0$$

Si $Z_L = 0 \Longrightarrow \Gamma_L = -1 = 1\angle \pm 180^\circ$

$Z_L = \infty \longrightarrow \Gamma_L = +1 = 1\angle 0^\circ$

$$V(z) = V_0^+ \left.\left(e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}\right)\right|_{\Gamma_L = -1}$$

Otro parámetro de interés es la



$$Z_{in} = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_o^+ \left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)}{\frac{V_o^+}{Z_o}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)}$$

$$= Z_o \frac{\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)}{\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)}$$

Para entrada $z = -l$

$$Z_{in}(z=-l) = \frac{Z_o\left(e^{j\beta l} + \Gamma_L e^{-j\beta l}\right)}{e^{j\beta l} - \Gamma_L e^{-j\beta l}}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \quad \therefore \quad Z_{in} = \frac{Z_o\left(e^{j\beta l} + \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} e^{-j\beta l}\right)}{\left(e^{j\beta l} - \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} e^{-j\beta l}\right)}$$

$$Z_{in} = Z_o \frac{(Z_L + Z_o)e^{j\beta l} + (Z_L - Z_o)e^{-j\beta l}}{(Z_L + Z_o)e^{j\beta l} - (Z_L - Z_o)e^{-j\beta l}}$$

$$Z_{in} = Z_o \frac{Z_L\left(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}\right) + Z_o\left(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}\right)}{Z_o\left(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}\right) + Z_L\left(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}\right)}$$

$2\cos\beta l = e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}$; $j2\sin\beta l = e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos\beta l + jZ_0 \sin\beta l}{Z_0 \cos\beta l + jZ_L \sin\beta l}$$

$$\boxed{Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta l}{Z_0 + jZ_L \tan\beta l}}$$

Si $Z_L = Z_0 \longrightarrow Z_{in} = Z_0$ (línea acoplada)

Matched !!

Si $Z_L = 0 \longrightarrow Z_{in} = jZ_0 \tan\beta l$

Si $Z_L = \infty \longrightarrow -jZ_0 \cot\beta l = Z_{in}$

Si $l = \lambda/4$ $\quad \tan\beta l = \tan \frac{2\pi}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{4}2} = \infty$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{\overset{0}{\cancel{\frac{Z_L}{\tan\beta l}}} + jZ_0 \frac{\cancel{\tan}\beta l}{\cancel{\tan}\beta l}}{\overset{0}{\cancel{\frac{Z_0}{\tan\beta l}}} + jZ_L \frac{\cancel{\tan}\beta l}{\cancel{\tan}\beta l}} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

$$\boxed{Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L}}$$